Université Denis Diderot (Paris 7) **MM1**
Mathématiques **30 septembre 2013**

Ensembles et Applications

---

1. Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que :
   (a) si $A \subset B$ alors $A \cup C \subset B \cup C$.
   (b) $E \setminus (A \cup B) = E \setminus A \cap E \setminus B$.
   (c) $A \subset B$ si, et seulement si, $A \cap (E \setminus B) = \emptyset$
2. Si E est un ensemble fini à n éléments, montrer par récurrence sur n que l'ensemble de ses parties est un ensemble fini à 2^n éléments.
3. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.
   (a) Rappeler la définition de l'image directe d'un sous-ensemble de X par f et la définition de l'image réciproque d'un sous-ensemble de Y par f.
   (b) Soient $A, B \subset X$, montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$, puis montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ et donner un exemple où l'inclusion est stricte.
   (c) Montrer que f est injective si, et seulement si, pour toutes parties A, B de E, on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   (d) Montrer que f est bijective si, et seulement si, pour toutes parties A de E, on a $F \setminus f(A) = f(E \setminus A)$.
   (e) Soient $A, B \subset Y$. Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, puis que $f^{-1}(Y \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.
4. On considère l'application :
$$\begin{aligned} f : [-\pi,\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x\,. \end{aligned}$$
   (a) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:
$$f^{-1}\big(\{0\}\big)\,,\ f^{-1}\big(]0,+\infty[\big)\,,\ f^{-1}\big([-1,0]\big)\,,\ f\big([\pi/6,\ \pi/3]\big)\,,\ f\big([\pi/2,\ \pi]\big)\,.$$
   (b) Donner un exemple de partie A de $[-\pi,\pi]$ pour laquelle :
$$f^{-1}\big(f(A)\big) \neq A\,.$$
5. On considère l'application :
$$f\colon [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x) + 1.$$
   (a) Etudier les variations de la fonction f sur $[-\pi, 2\pi]$, puis représenter son graphe et déterminer son image $f([-\pi, 2\pi])$.
   (b) Décrire les sous-ensembles suivants de $[-\pi, 2\pi]$:
$$f^{-1}\big(\{2\}\big)\,, f^{-1}\big(\{0\}\big)\,, f^{-1}\big(\{1\}\big)\,, f^{-1}\big(\{-1\}\big)\,, f^{-1}\big(]0,+\infty[\big)\,, f^{-1}\big([0,1]\big)$$
   (c) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:
$$f\big([0,\pi]\big)\,,\ f\big([-\pi,0]\big)\,.$$

(d) Donner un exemple de partie B de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $f\big(f^{-1}(B)\big) \neq B$.

6. Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ l'application définie par $f(z) = \frac{i}{z}$.
   (a) Démontrer que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}$, où $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ est définie par $\mathrm{id}_{\mathbb{C}^*}(z) = z$.
   (b) Calculer l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $f(z) = z$.
   (c) Soit $C_r = \{z \in \mathbb{C}^* \mid |z| = r\}$ le cercle de centre le point d'affixe 0 et de rayon r. Calculer l'image directe par f du sous-ensemble C_r. En donner une interprétation géométrique.
7. Soient X, Y, Z trois ensembles et $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ des applications.
   (a) Rappeler la définition d'une application injective, d'une application surjective.
   (b) Donner l'exemple d'une application injective, d'une application surjective, d'une application ni injective, ni surjective.
   (c) Montrer que :
      i. si $g \circ f$ est injective, alors f est injective,
      ii. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
8. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application.
   (a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
      i. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
         A. f est injective,
         B. pour tout $a \in X$, $f^{-1}(f(\{a\})) = \{a\}$,
         C. pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, $f^{-1}(f(A)) = A$.
      ii. f est surjective,
      iii. pour tout $b \in Y$, $f(f^{-1}(\{b\})) = \{b\}$,
      iv. pour tout $B \in \mathscr{P}(Y)$, $f(f^{-1}(B)) = B$.

      Indications : On vérifiera d'abord que pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$ et que pour tout $B \in \mathscr{P}(Y)$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
9. Soient X, Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Soient

$$\varphi : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X), \varphi(B) = f^{-1}(B),$$

   et

$$\psi : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y), \psi(A) = f(A),$$

   (a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
      i. f est injective
      ii. φ est surjective
      iii. ψ est injective
   (b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
      i. f est surjective
      ii. φ est injective
      iii. ψ est surjective

10. Soit E un ensemble ; pour toute partie A de E, on note $\varphi_A : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$, définie par $X \mapsto X \cap A$ et $\phi_A : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$, définie par $X \mapsto X \cup A$.
    (a) Montrer que φ_A est injective si, et seulement si, φ_A est surjective si, et seulement si, $A = E$.
    (b) Montrer que ϕ_A est injective si, et seulement si, ϕ_A est surjective si, et seulement si, $A = \emptyset$.
11. Soit f une application de E dans E telle que $f \circ f \circ f = \mathbf{1}_E$. Montrer que f est bijective et exprimer sa bijection réciproque.
12. Soient E, F deux ensembles finis. On note $m = \sharp E$ (resp. $n = \sharp F$) le nombre d'éléments de E (resp. F). Déterminer le nombre d'injections de E dans F. Puis déterminer le nombre de bijections de E sur F.
13. Considérons l'application suivante :

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*,\ x \mapsto x + \frac{1}{x}.$$

    (a) Rappeler les définitions d'une application injective, d'une application surjective, d'une application bijective.
    (b) Vérifier que l'application f ci-dessus est bien définie.
    (c) Etudier les variations de f et les résumer dans un tableau.
    (d) Calculer l'image directe $f(\mathbb{R}_+^*)$ de $\mathbb{R}_+^*$ par f. L'application f est-elle surjective (justifier votre réponse) ?
    (e) Calculer les images réciproques $f^{-1}(]0, 1[)$ et $f^{-1}([2, 4])$.
    (f) L'application f est-elle injective (justifier votre réponse) ?
    (g) On s'intéresse maintenant à l'application :

$$g : [1, +\infty[\to [2, +\infty[,\ x \mapsto x + \frac{1}{x}.$$

    Montrer que g est bien définie et qu'elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$.